

HOCHSCHULBÜCHER FÜR MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON
H. GRELL, K. MARUHN UND W. RINOW

BAND 2

LEHRGANG DER
HÖHEREN MATHEMATIK

VON

W. I. SMIRNOW

MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR

TEIL II

MIT 145 ABBILDUNGEN

1955

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

INHALT

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung	1
1. Allgemeine Begriffe	1
2. Differentialgleichungen mit separierbaren Veränderlichen	2
3. Homogene Differentialgleichungen	4
4. Lineare Differentialgleichungen und die BERNOULLISCHE Differentialgleichung	8
5. Festlegung der Lösung einer Differentialgleichung durch die Anfangsbedingung	14
6. Das EULER-CAUCHYSche Verfahren	17
7. Das allgemeine Integral	18
8. Die CLAIRAUTSche Differentialgleichung	24
9. Die LAGRANGESche Differentialgleichung	26
10. Die Einhüllende einer Kurvenschar und die singulären Lösungen	28
11. Die in y' quadratischen Gleichungen	31
12. Die isogonalen Trajektorien	32
§ 2. Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen	35
13. Allgemeine Begriffe	35
14. Die graphischen Verfahren zur Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung	40
15. Die Gleichung $y^{(n)} = f(x)$	43
16. Die Biegung eines Balkens	44
17. Die Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung	49
18. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	53
19. Beispiele	55
20. Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung	60
21. Lineare partielle Differentialgleichungen	61
22. Geometrische Interpretation	64
23. Beispiele	66

II. Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen

§ 1. Allgemeine Theorie. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	70
24. Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung	70
25. Die lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung	73
26. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	74
27. Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	76
28. Die lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	78
29. Spezielle Fälle	80

30. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	82
31. Lineare Differentialgleichungen und die Schwingungsvorgänge	84
32. Eigenschwingungen und erzwungene Schwingungen	86
33. Sinusförmige äußere Kraft und Resonanz	88
34. Stoßförmige äußere Kraft (Impuls)	92
35. Statisch wirkende äußere Kraft.	94
36. Stabilität eines durch Längskräfte beanspruchten elastischen Stabes (EULERSches Problem)	96
37. Die rotierende Welle.	98
38. Die Operatorenmethode	100
39. Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	103
40. Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.	105
41. Beispiel.	106
42. Die EULERSche Differentialgleichung	107
43. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	109
44. Beispiele	113
§ 2. Integration mittels Potenzreihen	116
45. Integration einer linearen Differentialgleichung mittels einer Potenzreihe	116
46. Beispiele	119
47. Entwicklung der Lösung in eine verallgemeinerte Potenzreihe	121
48. Die BESSELSche Differentialgleichung	123
49. Differentialgleichungen, die sich auf die BESSELSche Differentialgleichung zurückführen lassen	126
§ 3. Ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen	128
50. Die Methode der sukzessiven Approximation für lineare Differentialgleichungen	128
51. Nichtlineare Differentialgleichungen	134
52. Singuläre Punkte einer Differentialgleichung erster Ordnung.	139
53. Die Stromlinien einer kollinearen ebenen Flüssigkeitsbewegung.	140

III. Mehrfache Integrale und Kurvenintegrale.

Uneigentliche Integrale und Integrale, die von einem Parameter abhängen

§ 1. Mehrfache Integrale	148
54. Volumina.	148
55. Das Doppelintegral	151
56. Die Berechnung des Doppelintegrals.	153
57. Krummlinige Koordinaten	157
58. Das dreifache Integral.	160
59. Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten	164
60. Krummlinige Koordinaten im Raum	169
61. Fundamenteleigenschaften mehrfacher Integrale	171
62. Der Inhalt einer Fläche	172
63. Flächenintegrale und die GAUSS-OSTROGRADSKISCHE Formel	175
64. Integrale über eine bestimmte Seite der Fläche	178
65. Momente	180
§ 2. Kurvenintegrale	184
66. Definition des Kurvenintegrals	184
67. Die Arbeit in einem Kraftfeld. Beispiele.	188

68. Flächeninhalt und Kurvenintegral	191
69. Die GREENSche Formel	193
70. Die STOKESSche Formel	195
71. Die Unabhängigkeit eines ebenen Kurvenintegrals vom Weg	198
72. Der Fall eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches	203
73. Die Unabhängigkeit eines räumlichen Kurvenintegrals vom Weg	205
74. Die stationäre Strömung einer Flüssigkeit	207
75. Der integrierende Faktor	209
76. Die vollständige Differentialgleichung im Fall dreier Veränderlicher	213
77. Substitution der Veränderlichen in einem Doppelintegral	215
§ 3. Uneigentliche Integrale und Integrale, die von einem Parameter abhängen	217
78. Integration unter dem Integralzeichen	217
79. Die DIRICHLETSche Formel	219
80. Differentiation unter dem Integralzeichen	222
81. Beispiele	225
82. Uneigentliche Integrale	230
83. Nicht absolut konvergente Integrale	234
84. Gleichmäßig konvergente Integrale	237
85. Beispiele	240
86. Uneigentliche mehrfache Integrale	243
87. Beispiele	247
§ 4. Ergänzungen zur Theorie der mehrfachen Integrale	252
88. Grundbegriffe	252
89. Fundamentalsätze der Mengenlehre	254
90. Innerer und äußerer Inhalt	256
91. Meßbare Bereiche	257
92. Die Unabhängigkeit von der Wahl des Bezugssystems	259
93. Der Fall beliebig vieler Dimensionen	260
94. Der Satz von DARBOUX	261
95. Integrierbare Funktionen	263
96. Eigenschaften der integrierbaren Funktionen	264
97. Die Berechnung des Doppelintegrals	266
98. Die n -fachen Integrale	268
99. Beispiele	269
IV. Vektoranalysis und Feldtheorie	
100. Addition und Subtraktion von Vektoren	272
101. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Komplanare Vektoren	274
102. Die Zerlegung eines Vektors in drei nichtkomplanare Vektoren	275
103. Das skalare Produkt	276
104. Das Vektorprodukt	277
105. Beziehungen zwischen Skalarprodukt und Vektorprodukt	280
106. Die Geschwindigkeitsverteilung bei der Drehung eines starren Körpers. Das Moment eines Vektors	281
107. Differentiation eines Vektors	283
108. Das skalare Feld und sein Gradient	285
109. Das Vektorfeld. Rotation und Divergenz	288
110. Potential- und Solenoidfeld	291
111. Das orientierte Flächenelement	293

112. Einige Formeln der Vektoranalysis	295
113. Die Bewegung eines starren Körpers. Kleine Deformationen	296
114. Die Kontinuitätsgleichung	298
115. Die hydrodynamischen Gleichungen einer idealen Flüssigkeit	301
116. Die Gleichungen der Schallausbreitung	302
117. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung	304
118. Die MAXWELLSchen Gleichungen	306
119. Die Darstellung des LAPLACESchen Operators in orthogonalen Koordinaten	308
120. Differentiation im Fall eines veränderlichen Feldes	313

V. Anfangsgründe der Differentialgeometrie

121. Die ebene Kurve, ihre Krümmung und Evolute	319
122. Die Evolvente	325
123. Die natürliche Gleichung einer Kurve	325
124. Die Fundamentalgrößen einer Raumkurve	327
125. Die FRENETSchen Formeln	330
126. Die Schmiegeebene	331
127. Die Schraubenlinie	332
128. Das Feld der Einheitsvektoren	334
129. Die Parameterdarstellung einer Fläche	335
130. Die erste GAUSSSche Fundamentalform	337
131. Die zweite GAUSSSche Fundamentalform	338
132. Die Krümmung der Flächenkurven	340
133. Die DUPINSche Indikatrix und die EULERSche Formel	343
134. Bestimmung der Hauptkrümmungsradien und der Hauptkrümmungsrichtungen	345
135. Krümmungslinien	347
136. Der DUPINSche Satz	349
137. Beispiele	350
138. Die GAUSSSche Krümmung	352
139. Variation des Flächenelements und mittlere Krümmung	353
140. Die Einhüllende einer Flächenschar und die Einhüllende einer Kurvenschar	356
141. Abwickelbare Flächen	359

VI. FOURIER-Reihen

§ 1. Die harmonische Analyse	361
142. Die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen	361
143. Der DIRICHLETSche Satz	365
144. Beispiele	367
145. Die Entwicklung im Intervall $(0, \pi)$	369
146. Periodische Funktionen der Periode $2l$	374
147. Der mittlere quadratische Fehler	375
148. Allgemeine orthogonale Funktionensysteme	379
149. Praxis der harmonischen Analyse	384
§ 2. Ergänzende Ausführungen zur Theorie der FOURIER-Reihen	388
150. Die Entwicklung in eine FOURIER-Reihe	388
151. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung	393
152. Das DIRICHLETSche Integral	396
153. Der DIRICHLETSche Satz	400

154. Approximation einer stetigen Funktion durch Polynome	401
155. Die Vollständigkeitsrelation	406
156. Eigenschaften vollständiger Funktionensysteme	408
157. Der Konvergenzcharakter der FOURIER-Reihen	412
158. Verbesserung der Konvergenz von FOURIER-Reihen	416
159. Beispiel	418

§ 3. Das FOURIER-Integral und die mehrfachen FOURIER-Reihen.	420
160. Die FOURIERSche Formel	420
161. Die FOURIER-Reihen in der komplexen Form	428
162. Mehrfache FOURIER-Reihen.	429

VII. Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

§ 1. Die Wellengleichung	431
163. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	431
164. Die D'ALEMBERTSche Lösung	435
165. Spezielle Fälle	437
166. Die begrenzte Saite.	441
167. Die FOURIERSche Methode	445
168. Die Harmonischen. Stehende Wellen	448
169. Erzwungene Schwingungen	450
170. Eine Einzelkraft	452
171. Die POISSONSche Formel	456
172. Zylinderwellen	461
173. Der n -dimensionale Raum.	463
174. Die inhomogene Wellengleichung	464
175. Die punktförmige Quelle	467
176. Querschwingungen einer Membran	469
177. Die rechteckige Membran	470
178. Die kreisförmige Membran	473
179. Der Eindeutigkeitssatz	479
180. Anwendung des FOURIERSchen Integrals	482

§ 2. Die Telegraphengleichung	484
181. Die Grundgleichungen	484
182. Stationäre Prozesse.	485
183. Einschwingvorgänge	487
184. Beispiele.	491
185. Die verallgemeinerte Gleichung der Saitenschwingungen	493
186. Der unbegrenzte Leiter im allgemeinen Fall	497
187. Das FOURIERSche Verfahren für den begrenzten Leiter	499
188. Die verallgemeinerte Wellengleichung	503

§ 3. Stabschwingungen	505
189. Die Grundgleichungen	505
190. Partikuläre Lösungen	506
191. Entwicklung einer willkürlichen Funktion.	510

§ 4. Die LAPLACESche Gleichung	513
192. Harmonische Funktionen	513
193. Die GREENSche Formel	515

194. Fundamenteigenschaften der harmonischen Funktionen	519
195. Die Lösung des DIRICHLETSchen Problems für den Kreis	522
196. Das POISSONSche Integral	526
197. Das DIRICHLETSche Problem für die Kugel	529
198. Die GREENSche Funktion	533
199. Der Fall des Halbraums	534
200. Das Potential räumlich verteilter Massen	536
201. Die POISSONSche Gleichung	539
202. Die KIRCHHOFFSche Formel	542
§ 5. Die Wärmeleitungsgleichung	545
203. Grundgleichungen	545
204. Der unbegrenzte Stab	546
205. Der einseitig begrenzte Stab.	551
206. Der beiderseits begrenzte Stab.	555
207. Ergänzende Bemerkungen	558
208. Der kugelsymmetrische Fall	559
209. Der Eindeutigkeitsatz	562