

# Obsah

Fregeho filozofia matematiky a program logicizmu .....	XI
1. Projekt logicizmu .....	XI
2. Základy aritmetiky .....	XV
3. Ďalší osud logicizmu .....	XXXI
4. Rehabilitácia Fregeho matematického výkonu .....	XXXV
5. Zmŕtvychvstania logicizmu .....	XXXVII
6. Záver .....	XL
Poznámka prekladateľa .....	XLIII

## Gottlob Frege *Základy aritmetiky*

Úvod .....	3
------------	---

§ 1. V matematike v poslednom čase badať snahu o presnosť dôkazov a ostré chápanie pojmov .....	11
§ 2. Toto preverovanie treba napokon rozšíriť aj na pojem Číslo. Účel dôkazu .....	11
§ 3. Filozofické motívy takéhoto skúmania: sporné otázky, či sú zákony o číslach analytické alebo syntetické pravdy, a priori alebo a posteriori. Zmysel týchto výrazov .....	12
§ 4. Úloha tejto knihy .....	13

### I. Názory niektorých autorov na povahu aritmetických viet.

#### *Sú číselné formuly dokázateľné?*

§ 5. Kant to popiera, čo Hankel právom nazýva paradoxným .....	14
§ 6. Leibnizov dôkaz $2 + 2 = 4$ obsahuje medzeru. Grassmannova definícia $a + b$ je chybná .....	15
§ 7. Millov názor, že definície jednotlivých čísel tvrdia pozorované skutočnosti, z ktorých vyplývajú výpočty, nie je zdôvodnený .....	16
§ 8. Pre smerodajnosť týchto definícií nie je potrebné pozorovanie spomenutých skutočností   .....	18

*Sú aritmetické zákony induktívnymi pravdami?*

§ 9.	Millov prírodný zákon. Mill tým, že aritmetické pravdy nazýva prírodnými zákonmi, zamieňa tieto pravdy s ich použitiami . . . . .	19
§ 10.	Dôvody proti názoru, že zákony sčítania sú induktívnymi pravdami: nie všetky sú čísla toho istého druhu; definícia čísla sama neposkytuje množinu spoločných vlastností čísel; pravdepodobne naopak indukciu treba založiť na aritmetike . . . . .	20
§ 11.	Leibnizovo „vrodené“ . . . . .	22

*Sú aritmetické zákony syntetické a priori alebo analytické?*

§ 12.	Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Vnútorne nazeranie ako základ poznania . . . . .	22
§ 13.	Rozdiel medzi aritmetikou a geometriou . . . . .	23
§ 14.	Porovnanie právd so zreteľom na oblasť, ktorú charakterizujú . . . . .	24
§ 15.	Názory Leibniza a St. Jevonsa . . . . .	24
§ 16.	Naproti tomu Millove znehodnocovanie „obratného zaobchádzania s jazykom“. Len kvôli tomu, že znaky neznamenajú nič vnímateľného, nie sú ešte prázdne . . . . .	25
§ 17.	Nedostatočnosť indukcie. Domnienka, že zákony o číslach sú analytické súdy; čom potom spočíva ich úžitok. Ocenenie analytických súdov . . . . .	26

## II. Názory niektorých autorov na pojem Číslo.

§ 18.	Nevyhnutnosť skúmania všeobecného pojmu Číslo . . . . .	27
§ 19.	Definícia nesmie byť geometrická . . . . .	27
§ 20.	Je číslo definovateľné? Hankel. Leibniz . . . . .	28

*Je Číslo vlastnosťou vonkajších vecí?*

§ 21.	Názory M. Cantora a E. Schrödera . . . . .	28
§ 22.	Naproti tomu Baumann: vonkajšie veci nepredstavujú presné jednotky. Číslo zdanlivo závisí od nášho ponímania . . . . .	29
§ 23.	Millov názor, že číslo je vlastnosťou agregátu vecí, je neudržateľný	30
§ 24.	Rozsiahla použiteľnosť čísla. Mill. Locke. Leibnizova netelesná metafyzická figúra. Ak by číslo bolo niečím zmyslovým, nebolo by možné prisúdiť ho niečomu nezmyslovému . . . . .	31
§ 25.	Millov fyzikálny rozdiel medzi 2 a 3. Podľa Berkeleyho nie je číslo skutočne vo veciach, ale je výtvorom ducha . . . . .	32

*Je číslo niečo subjektívne?*

- § 26. Lipschitzov opis tvorenia čísel nesedí a nemôže nahradiť vymedzenie pojmu. Číslo nie je predmetom psychológie, ale niečo objektívne . . . 33
- § 27. Číslo nie je, ako tvrdí Schloemilch, predstavou miesta objektu v rade 35

*Číslo ako množina.*

- § 28. Thomaeho pomenúvanie . . . . . 36

## III. Názory na jednotku a [číslo] Jeden.

*Vyjadruje číslovka „Jeden“ vlastnosť predmetov?*

- § 29. Mnohoznačnosť výrazov „μονάς“ a „Einheit“. Definícia jednotky E. Schrödera ako počítateľného predmetu je zrejme bezúčelná. Adjektívum „Jeden“ neobsahuje bližšie určenie, nemôže slúžiť ako predikát . . . . . 37
- § 30. Zdá sa, že po Leibnizových a Baumannových pokusoch o definíciu jednoty sa tento pojem celkom rozplynul . . . . . 38
- § 31. Baumannove kritériá nerozdelenosti a ohraničenosti. Ideu jednoty v nás nevyvoláva každý objekt (Locke) . . . . . 38
- § 32. Jazyk predsa len naznačuje istú súvislosť s nerozdelenosťou a ohraničenosťou, pri čom sa však posúva zmysel . . . . . 39
- § 33. Nedeliteľnosť (G. Köpp) je ako kritérium jednotky neudržateľná . . . 39

*Sú jednotky navzájom totožné?*

- § 34. Totožnosť ako dôvod pre meno „jednotka“. E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Abstrahovaním od odlišností vecí nedostaneme pojem Číslo a veci sa tým nestanú navzájom totožné | . . . . . 40
- § 35. Odlišnosť je dokonca nevyhnutná, pokiaľ má byť reč o mnohosti. Descartes. E. Schröder. St. Jevons . . . . . 41
- § 36. Názor, že jednotky sú odlišné, naráža tiež na ťažkosti. Rôzne [čísla] Jeden u St. Jevonsa . . . . . 42
- § 37. Lockova, Leibnizova, Hesseho definícia čísla pomocou jednotky alebo Jeden . . . . . 43
- § 38. „Jeden“ je vlastné meno, „jednotka“ pojmové slovo. Číslo nemožno definovať ako jednotky. Rozdiel medzi „a“ a + . . . . . 43
- § 39. Mnohoznačnosť slova „jednotka“ zakrýva ťažkosť so zladením totožnosti a rozlíšiteľnosti jednotiek . . . . . 44

*Pokusy o prekonanie tejto ťažkosti.*

§ 40.	Priestor a čas ako prostriedky rozlišovania. Hobbes. Thomae. Protí nim: Leibniz, Baumann, St. Jevons . . . . .	45
§ 41.	Účel sa nedosiahne . . . . .	46
§ 42.	Miesto v rade ako prostriedok rozlišovania. Hankelove kladenie . . .	47
§ 43.	Schröderove zobrazenie predmetov pomocou znaku 1 . . . . .	47
§ 44.	Jevonsove abstrahovanie od charakteru rozdielov pri zachovaní ich existencie. 0 a 1 sú čísla ako ostatné. Ťažkosť zostáva . . . . .	48

*Riešenie tejto ťažkosti.*

§ 45.	Rekapitulácia . . . . .	49
§ 46.	Číselný údaj obsahuje výpoveď o pojme. Námetka, že číslo sa mení, zatiaľ čo pojem ostáva nezmenený . . . . .	50
§ 47.	Objektivita pojmu vysvetľuje fakt, že číselný údaj vyjadruje niečo skutočné . . . . .	51
§ 48.	Rozriešenie niektorých ťažkostí . . . . .	51
§ 49.	Potvrdenie u Spinozu . . . . .	52
§ 50.	Výklad E. Schrödera . . . . .	53
§ 51.	Oprava tohto výkladu . . . . .	53
§ 52.	Potvrdenie v idiómoch nemeckého jazyka . . . . .	53
§ 53.	Rozdiel medzi atribútmi a vlastnosťami pojmu. Existencia a číslo . .	54
§ 54.	Jednotkou možno nazvať subjekt číselného údaju. Nedeliteľnosť a ohraničenosť jednotky. Totožnosť a rozlišiteľnosť   . . . . .	54

## IV. Pojem Číslo.

*Každé jednotlivé číslo je samostatným predmetom.*

§ 55.	Pokus o doplnenie leibnizovských definícií jednotlivých čísel . . . . .	56
§ 56.	Pokusné definície sú nepoužiteľné, pretože definujú výpoveď, v ktorej je číslo len časťou . . . . .	56
§ 57.	Číselný údaj treba považovať za rovnosť medzi číslami . . . . .	57
§ 58.	Námetka, že o čísle ako samostatnom predmete si nevieme vytvoriť predstavu. Číslo je vo všeobecnosti nepredstaviteľné . . . . .	57
§ 59.	Preto, že si nevieme predstaviť nejaký predmet, nemusíme ho ešte vylúčiť zo skúmania . . . . .	58
§ 60.	Ani samotné konkrétne veci si nevieme vždy predstaviť. Keď sa pýtame na význam slov, musíme ich pozorovať vo vete . . . . .	58
§ 61.	Námetka, že čísla sú nepriestorové. Nie každý objektívny predmet je priestorový . . . . .	59

*Na to, aby sme získali pojem Číslo, musíme určiť zmysel číselnej rovnosti.*

§ 62.	Potrebuje kritérium pre totožnosť čísel	59
§ 63.	Možnosť jednoznačného priradenia ako takéto kritérium. Logická pochybnosť, že totožnosť definujeme zvlášť pre tento prípad	60
§ 64.	Príklady podobného postupu: smer priamky, poloha roviny, tvar trojuholníka	61
§ 65.	Pokus o definíciu. Druhá pochybnosť: či vyhovíme zákonom o totožnosti	61
§ 66.	Tretia pochybnosť: kritérium totožnosti je nedostačujúce	63
§ 67.	Nemôžeme ho doplniť tým, že spôsob, ktorým je predmet zavedený, priberieme medzi atribúty pojmu	63
§ 68.	Číslo ako rozsah pojmu	64
§ 69.	Objasnenie	65

*Doplnenie a overenie našej definície.*

§ 70.	Pojem vzťahu	66
§ 71.	Priradenie prostredníctvom vzťahu	67
§ 72.	Obojstranne jednoznačný vzťah. Pojem Číslo	68
§ 73.	Číslo, ktoré prislúcha pojmu F, je totožné s Číslom, ktoré prislúcha pojmu G, ak existuje vzťah, ktorý predmety spadajúce pod F obojstranne jednoznačne priraduje predmetom spadajúcim pod G	69
§ 74.	Nula je Číslo, ktoré prislúcha pojmu „netotožný so sebou samým“	69
§ 75.	Nula je Číslo, ktoré prislúcha pojmu, pod ktorý nič nespadá. Pod pojem nespadá žiadny predmet, ak je Nula Číslo, ktoré mu prislúcha	71
§ 76.	Definícia výrazu „ $n$ nasleduje v rade prirodzených čísel bezprostredne za $m$ “	71
§ 77.	1 je Číslo, ktoré prislúcha pojmu „totožný s 0“	72
§ 78.	Vety, ktoré možno dokázať prostredníctvom našich definícií	73
§ 79.	Definícia nasledovania v rade	73
§ 80.	Poznámky k tejto definícii. Objektivita nasledovania	74
§ 81.	Definícia výrazu „ $x$ prináleží $\phi$ -radu, ktorý sa končí $y$ “	75
§ 82.	Naznačenie dôkazu, že neexistuje posledný člen radu prirodzených čísel	75
§ 83.	Definícia konečného Číslo. Žiadne konečné Číslo v rade prirodzených čísel nenasleduje za sebou samým.	76

*Nekonečné Číslo.*

§ 84.	Číslo, ktoré prislúcha pojmu „konečné Číslo“, je nekonečné Číslo . .	77
§ 85.	Cantorove nekonečné Číslo; „mohutnosť“. Odchýlka v terminológii	77
§ 86.	Cantorovo nasledovanie v postupnosti a moje nasledovanie v rade . . . .	78

V. Záver.

§ 87.	Povaha aritmetických zákonov . . . . .	78
§ 88.	Kantovo podcenenie analytických súdov . . . . .	79
§ 89.	Kantova veta: „Bez zmyslovosti by nám nebol daný žiadny predmet.“ Kantove zásluhy o matematiku . . . . .	80
§ 90.	Pre úplný dôkaz analytickej povahy aritmetických zákonov chýba reťazec úsudkov bez medzier . . . . .	80
§ 91.	Moje pojmové písmo môže odpomôcť tomuto nedostatku . . . . .	81

*Iné čísla.*

§ 92.	Zmysel otázky o možnosti čísel podľa Hankela . . . . .	82
§ 93.	Čísla nie sú ani priestorovo mimo nás, ani subjektívne   . . . . .	82
§ 94.	Neprotirečivosť pojmu nezaručuje, že podoň niečo spadá, a sama si vyžaduje dôkaz . . . . .	83
§ 95.	$(c - b)$ nesmieme bez okolkov považovať za znak, ktorý je riešením úlohy odčítania . . . . .	84
§ 96.	Ani matematik nemôže niečo vytvoriť svojvoľne . . . . .	84
§ 97.	Pojmy treba odlišovať od predmetov . . . . .	85
§ 98.	Hankelova definícia sčítania . . . . .	85
§ 99.	Nedostatočnosť formálnej teórie . . . . .	85
§ 100.	Pokus o interpretáciu komplexných čísel prostredníctvom toho, že sa špeciálnym spôsobom rozšíri význam násobenia . . . . .	86
§ 101.	Možnosť takejto interpretácie nie je pre silu dôkazu nepodstatná .	87
§ 102.	Samotná požiadavka, že nejaká operácia sa má dať uskutočniť, nie je ešte jej splnením . . . . .	87
§ 103.	Kossakova definícia komplexných čísel je len návodom na definíciu a nezabráni vmiešavaniu cudzorodých prvkov. Geometrické zobrazenie . . . . .	87
§ 104.	Ide o to, aby sme stanovili význam reidentifikačného súdu pre nové čísla . . . . .	88
§ 105.	Pôvab aritmetiky spočíva v jej racionalite. . . . .	89
§ 106-109.	Rekapitulácia   . . . . .	90 – 92