

Inhalt

| | |
|--|-----------|
| Einleitung | 11 |
| Teil I. Allgemeine philosophische Probleme der Mathematik | 13 |
| 1. Mathematik und materielle Wirklichkeit | 13 |
| ◆ 1.1. Das Problem der Beziehung der Mathematik zur materiellen Wirklichkeit als philosophisches Grundproblem der Mathematik | 13 |
| ◆ 1.2. Die Entstehung der Grundbegriffe der Mathematik | 18 |
| ◆ 1.3. Die hauptsächlichsten Stimuli der Entwicklung der Mathematik | 24 |
| ◆ 1.4. Einfluß gesellschaftlicher Bedingungen auf die Entwicklung der Mathematik | 39 |
| ◆ 1.5. Der Gegenstand der Mathematik | 56 |
| ◆ 1.6. Die Bedeutung der Mathematik für die Entwicklung anderer Wissenschaften, der Technik und des menschlichen Lebens | 80 |
| ◆ 1.7. Die Praxis als Wahrheitskriterium in der Mathematik. Die Exaktheit der Mathematik | 90 |
| 2. Der Aufbau mathematischer Theorien | 97 |
| 2.1. Ziel und Mittel der Begründung der Mathematik. Mathematische Strenge | 97 |
| 2.2. Algorithmen | 112 |
| 2.3. Der Prozeß der Herausbildung von Grundbegriffen und Grundannahmen mathematischer Theorien durch Abstraktion | 116 |
| 2.4. Die Entwicklung von Verfahren zur Begründung der Mathematik und des Begriffs der mathematischen Strenge | 121 |
| 2.5. Inhalt und Bedeutung der mathematischen Symbolik | 129 |
| 2.6. Innere Gesetzmäßigkeiten der Entwicklung der Mathematik | 139 |

| | |
|--|------------|
| Teil II. Die drei großen Grundlagenkrisen der Mathematik | 151 |
| 1. Die Erarbeitung von Verfahren zur Begründung der Mathematik im alten Griechenland von Pythagoras bis Euklid | 152 |
| 1.1. Die Mathematik der Pythagoreer | 153 |
| 1.2. Das Problem des Unendlichen in der altgriechischen Philosophie und Mathematik | 156 |
| 1.3. Die drei berühmten Aufgaben des klassischen Altertums | 158 |
| 1.4. Die Überwindung der Grundlagenkrise der altgriechischen Mathematik | 160 |
| 2. Die Ausarbeitung von Verfahren zur Begründung der Mathematik im 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts | 161 |
| 2.1. Besonderheiten der Verfahren zur Begründung der Mathematik Ende des 17. und während des 18. Jahrhunderts | 161 |
| 2.2. Ursachen des Vorherrschens einer metaphysischen Behandlung der Grundlagenprobleme der Mathematik im 18. Jahrhundert | 176 |
| 2.3. Die Ausarbeitung von Verfahren zur Begründung der Mathematik im letzten Viertel des 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts | 189 |
| 3. Die Ausarbeitung von Methoden zur Begründung der Mathematik im letzten Viertel des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts | 212 |
| 3.2. Die historischen Voraussetzungen für die Entwicklung der Mengenlehre | 212 |
| 3.2. Grundbegriffe der Cantorsche allgemeinen Mengenlehre. Schwierigkeiten beim Aufbau der Mengenlehre | 223 |
| 3.3. Die philosophischen Ansichten Georg Cantors. Die philosophisch-mathematische Begründung der Mengenlehre | 229 |
| 3.4. Die Anfangsetappe der Kritik an der Konzeption G. Cantors. | 235 |
| 3.5. Paradoxien (Antinomien) der Mengenlehre | 242 |
| 3.6. Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre nach Zermelo | 244 |
| 3.7. Schwierigkeiten, die mit dem Zermeloschen Auswahlaxiom zusammenhängen | 246 |
| 3.8. Das Problem der Existenz in der Mathematik | 248 |
| 3.9. Über den philosophischen Aspekt der Schwierigkeiten einer mengentheoretischen Begründung der Mathematik | 251 |
| Teil III Die axiomatische Methode | 253 |
| 1. Die inhaltliche Axiomatisierung von Theorien | 255 |
| 1.1. Charakteristik der inhaltlichen Axiomatisierung einer Theorie | 255 |
| 1.2. Die „Elemente“ des Euklid als Musterbeispiel einer inhaltlichen Axiomatisierung einer Theorie | 256 |
| 1.3. Platon, Aristoteles und die Methodologie der „Elemente“ des Euklid | 259 |
| 2. Die semiformale Axiomatisierung von Theorien | 260 |
| 2.1. Charakteristik der semiformalen Axiomatisierung von Theorien | 260 |
| 2.2. Grundbegriffe und Axiome | 263 |
| 2.3. Vereinbarkeit von Axiomen (Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems) | 264 |

| | |
|--|------------|
| 2.4. Unabhängigkeit eines Axiomensystems | 267 |
| 2.5. Gleichwertigkeit von Axiomensystemen | 268 |
| 2.6. Vollständigkeit von Axiomensystemen | 269 |
| 2.7. Bedeutung der axiomatischen Methode für die Entwicklung der Mathematik | 269 |
| 2.8. Die axiomatische Methode in den Anwendungen der Mathematik | 274 |
| | |
| 3. Die Rolle der Praxis in der Entwicklung der Axiomatisierung der euklidischen Geometrie und der Arithmetik der natürlichen Zahlen | 279 |
| 3.1. Erarbeitung einer inhaltlichen Axiomatik für die Arithmetik der natürlichen Kardinalzahlen | 280 |
| 3.2. Beantwortung der zweiten Frage von S. A. Janowskaja | 282 |
| 3.3. Grundvoraussetzungen für die Erarbeitung eines semiformalen Axiomensystems der Arithmetik der natürlichen Zahlen | 286 |
| | |
| 4. Ergänzungen zur Charakteristik der semiformalen axiomatischen Methode | 289 |
| 4.1. Die Rolle des Induktionsaxioms in der Arithmetik der natürlichen Zahlen | 289 |
| 4.2. Über die sogenannten Definitionen durch Vereinbarung in der Mathematik. | 292 |
| 4.3. Grenzen der Wirksamkeit der semiformalen axiomatischen Methode | 295 |
| 4.4. Die erkenntnistheoretische Bedeutung der semiformalen axiomatischen Methode | 296 |
| | |
| Anhang | 297 |
| 1. Über die Widerspruchsfreiheit der Lobatschewskischen Geometrie | 297 |
| 1.1. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie | 297 |
| 1.2. Interpretation der Lobatschewskischen Planimetrie | 302 |
| 1.3. Die Widerspruchsfreiheit der Lobatschewskischen Geometrie | 306 |
| 1.4. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den Hilbertschen Axiomgruppen I, II, III und V | 306 |
| | |
| 2. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie nach H. Weyl | 308 |
| | |
| Namenregister | 312 |